

## Übungsaufgaben zur Klausur Q12

1. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche auf zwei Dezimalen genau die zwischen den Graphen der Funktionen  $f$  und  $g$  eingeschlossen wird.

a)  $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x$     $g(x) = 3x - x^2$

Lösungsskizze:

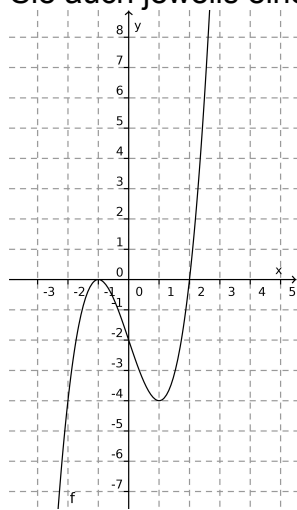
- Funktionsterme gleichsetzen und nach 0 auflösen:  $x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = 0$
- Schnittstellen bestimmen:  $x_1 = 0$  (einfach) und  $x_2 = 2$  (doppelt)
- Integral von 0 bis 2 berechnen:  $\int_0^2 (x^3 - 4x^2 + 4x) dx = \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 2x^2 \right]_0^2 = \frac{4}{3} \approx 1,33$

b)  $f(x) = -\frac{1}{x} + 1$     $g(x) = x - 1,5$

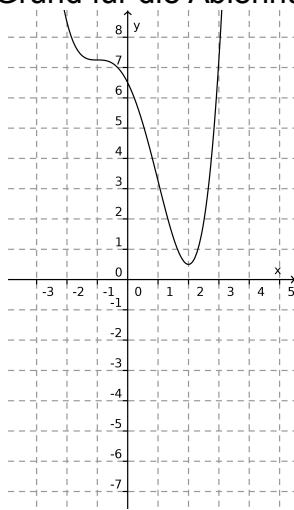
Lösungsskizze:

- Funktionsterme gleichsetzen und nach 0 auflösen:  
 $-\frac{1}{x} - x + 2,5 = 0 \quad | \cdot (-x) \Rightarrow x^2 - 2,5x + 1 = 0$
- Schnittstellen bestimmen:  $x_1 = 0,5$  (einfach) und  $x_2 = 2$  (einfach)
- Integral von 0,5 bis 2 berechnen:  $\int_{0,5}^2 \left(-\frac{1}{x} - x + 2,5\right) dx = \left[-\ln x - \frac{x^2}{2} + 2,5x\right]_{0,5}^2 \approx 0,49$

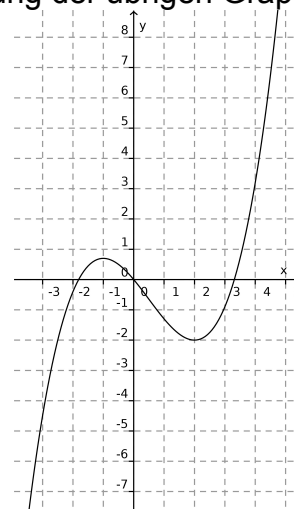
2. In den Abbildungen sehen Sie den Graphen der Funktion  $f$  und dreier weiterer Funktionen  $F_1$ ,  $F_2$  und  $F_3$ . Einer dieser drei Graphen ist Graph einer Integralfunktion von  $f$ . Geben Sie den gesuchten Graphen an und begründen Sie Ihre Entscheidung. Geben Sie auch jeweils einen Grund für die Ablehnung der übrigen Graphen an.



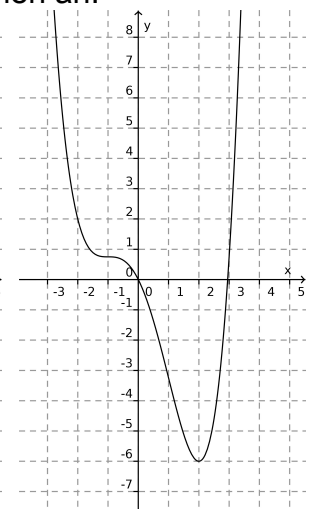
Graph der Funktion  $f$



$F_1$



$F_2$



$F_3$

Lösungsskizze:

- $F_1$  ist zwar Stammfunktion von  $f$ , kann aber keine Integralfunktion von  $f$  sein, da Integralfunktionen mindestens eine Nullstelle besitzen müssen.
- $F_2$  ist weder Stamm- noch Integralfunktion von  $f$ , da z.B. der Graph von  $F_2$  im Intervall  $]-\infty; -1]$  steigt, die Funktion  $f$  im gleichen Intervall aber negativ ist.
- $F_3$  ist die gesuchte Integralfunktion, da sie dem Steigungsverhalten von  $f$  entspricht ( $\Rightarrow$  Stammfunktion von  $f$ ) und mindestens eine Nullstelle, z.B. bei  $x_1 = 0$ , besitzt.

3. Untersuchen Sie unten stehende in ganz  $\mathbb{R}$  definierte Funktionen auf Lage und Art der Extremstellen und Wendestellen. Geben Sie maximale Monotonie- und Krümmungsintervalle an.

a)  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$  [zur Kontrolle:  $f''(x) = (2 - 2x^2)(x^2 + 1)^{-2}$ ]

Lösungsskizze:

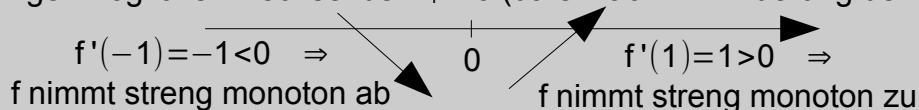
- Extremstellenkandidaten:  $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ (einfach)}$$

- Monotonieintervalle: Wechsel nur bei Definitionslücke oder  $f'(x) = 0$  möglich

Keine Definitionslücke, da Nenner nicht null werden kann.

Einziger möglicher Wechsel bei  $x_1 = 0$  (da einfach  $\Rightarrow$  Änderung der Monotonie)



Art der Monotonie z.B. durch Einsetzen eines Wertes innerhalb des Intervalls  $\Rightarrow$

$f$  nimmt streng monoton zu im Intervall  $]-\infty; 0]$  und streng monoton zu im Intervall  $[0, +\infty[$  oder

$G_f$  steigt streng monoton im Intervall  $]-\infty; 0]$  und fällt streng monoton im Intervall  $[0, +\infty[$

- Extremstellen (Teil 2: Art und Lage)

Art: Minimum bei  $x_1 = 0$ , da links davon Abnahme, rechts davon Zunahme der Fkt-werte

Lage:  $y_1 = f(x_1) = f(0) = \ln(0^2 + 1) = \ln(1) = 0 \Rightarrow$  Tiefpunkt bei  $(0 / 0)$

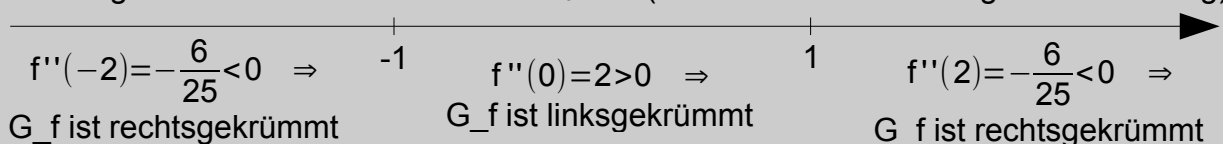
- Wendestellenkandidaten:  $f''(x) = 0$

$$f''(x) = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow 2(1 - x^2) = 0 \Rightarrow x_{2/3} = \pm 1 \text{ (jeweils einfach)}$$

- Krümmungsintervalle: Wechsel nur bei Definitionslücke oder  $f''(x) = 0$  möglich

Keine Definitionslücke, da Nenner nicht null werden kann.

Zwei mögliche Wechsel bei  $x_2 = -1$  und  $x_3 = 1$  (da einfach  $\Rightarrow$  Änderung der Krümmung)



Art der Krümmung z.B. durch Einsetzen eines Wertes innerhalb des Intervalls  $\Rightarrow$

$G_f$  ist rechtsgekrümmt in den Intervallen  $]-\infty; -1[$  und  $]1, +\infty[$  und linksgekrümmt in  $]-1; 1[$

- Wendestellen (Teil 2: Art und Lage)

Art: Da an den Wendestellen keine waagrechten Tangenten ( $f'(x) = 0$ ) vorliegen, handelt es sich nicht um Terrassenstellen

Lage:  $y_2 = f(x_2) = f(-1) = \ln((-1)^2 + 1) = \ln(2) \approx 0,69$ , da  $G_f$  achsensymmetrisch  $\Rightarrow y_3 = y_2 \Rightarrow$  Wendepunkte bei  $(-1 / \ln(2))$  und  $(1 / \ln(2))$

$$b) f(x) = \frac{x^3}{6} + x^2 + 2x + \frac{16}{3}$$

Lösungsskizze:

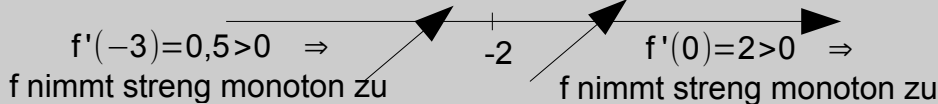
- Extremstellenkandidaten:  $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2 \text{ (doppelt)}$$

- Monotonieintervalle: Wechsel nur bei Definitionslücke oder  $f'(x) = 0$  möglich

Keine Definitionslücke

Einziger möglicher Wechsel bei  $x_1 = -2$  (da doppelt  $\Rightarrow$  keine Änderung der Monotonie)



Art der Monotonie z.B. durch Einsetzen eines Wertes innerhalb des Intervalls  $\Rightarrow$   
 $f$  nimmt streng monoton zu in ganz  $\mathbb{R}$  oder  $G_f$  steigt streng monoton in ganz  $\mathbb{R}$

- Extremstellen (Teil 2: Art und Lage)

Art: Da bei  $x_1 = -2$  kein Monotoniewechsel vorliegt existiert dort kein Extremum

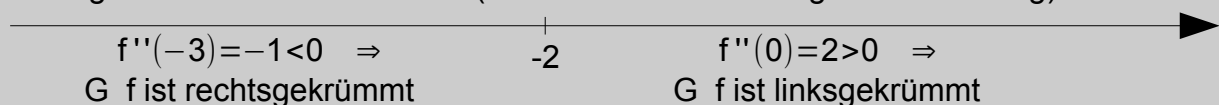
- Wendestellenkandidaten:  $f''(x) = 0$

$$f''(x) = x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2 \text{ (einfach)}$$

- Krümmungsintervalle: Wechsel nur bei Definitionslücke oder  $f''(x) = 0$  möglich

Keine Definitionslücke

Ein möglicher Wechsel bei  $x_1 = -2$  (da einfach  $\Rightarrow$  Änderung der Krümmung)



Art der Krümmung z.B. durch Einsetzen eines Wertes innerhalb des Intervalls  $\Rightarrow$   
 $G_f$  ist rechtsgekrümmt im Intervall  $]-\infty; -2[$  und linksgekrümmt im Intervall  $]-2; \infty[$

- Wendestellen (Teil 2: Art und Lage)

Art: Da an der Wendestelle eine waagrechte Tangente ( $f'(x) = 0$ ) vorliegt,  
 handelt es sich um eine Terrassenstelle

Lage:  $y_1 = f(x_1) = f(-2) = 4 \Rightarrow$  Terrassenpunkt bei  $(-2 / 4)$

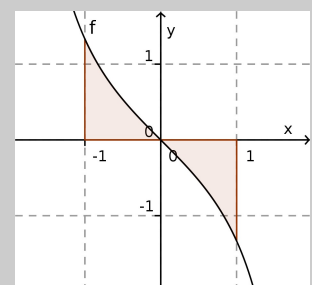
4. Begründen Sie!

a) Begründen Sie ohne den Wert des Integrals zu

$$\text{berechnen: } \int_{-1}^1 \frac{4x}{x^2 - 4} dx = 0$$

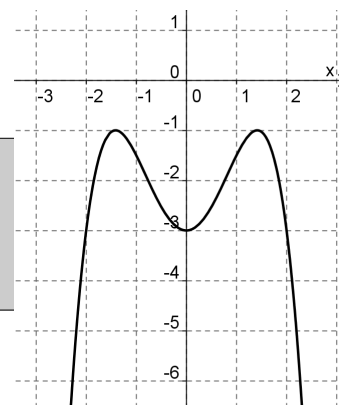
Lösungsskizze:

- Die Integrandenfunktion ist punktsymmetrisch und da die Integrationsgrenzen ebenfalls punktsymmetrisch zum Ursprung sind, heben sich die vom Betrag her gleich großen aber einmal im negativen und einmal im positiven Bereich liegenden Flächen beim Integral auf.





- b) Bestimmen Sie mithilfe des Graphen von G (Stammfunktion von g) einen Näherungswert für das Integral  $\int_{-2}^{0,75} g(x) dx$ .



Lösungsskizze:

$$\int_{-2}^{0,75} g(x) dx = [G(x)]_{-2}^{0,75} = G(0,75) - G(-2) \approx -2 - (-3) = 1$$

Aus Diagramm:  $G(0,75) \approx -2$  und  $G(-2) \approx -3$

- c) Begründen Sie, dass es unendlich viele Lösungen a für folgende Gleichung gibt:  $\int_0^a 3 \sin(x) dx = 1,5$

Lösungsskizze:

$$\int_0^a 3 \sin(x) dx = [-3 \cos(x)]_0^a = -3 \cos(x) - (-3 \cos(0)) = -3 \cos(x) = 1,5 \Rightarrow \cos(x) = -0,5$$

Für  $\cos(x) = -0,5$  gibt es unter anderem die Lösungen  $x = 2\pi/3 + 2\pi \cdot k$  mit  $k \in \mathbb{Z}$

5. Ein Kioskbesitzer bezieht wöchentlich 3 Exemplare einer selten gekauften Wochenzeitschrift. Die Tabelle gibt die Nachfrage nach der Zeitschrift wieder. Er kauft eine Zeitschrift für 2,50 € ein und verkauft sie für 4,80 € das Stück. Unverkaufte Exemplare kann er nicht zurückgeben. Macht er auf lange Sicht Gewinn?

Anzahl der Nachfragen pro Woche	0	1	2	3	4 und mehr
Wahrscheinlichkeit	5 %	40 %	35 %	10 %	10 %

Lösungsskizze:

- Zufallsgröße X: Gewinn pro Woche

(Hinweis: Auch bei Nachfrage 4 und mehr werden alle 3 Zeitschriften verkauft.)

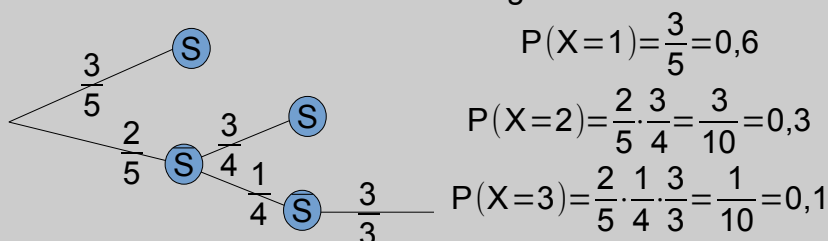
Gewinn pro Woche in €	-7,50	-2,70	2,10	6,90
Wahrscheinlichkeit	5 %	40 %	35 %	20 %

- Erwartungswert berechnen:  $E(X) = (-7,50) \cdot 0,05 + (-2,70) \cdot 0,40 + 2,10 \cdot 0,35 + 6,90 \cdot 0,20 = 0,66$   
 - Schluss ziehen: Der Kioskbesitzer macht auf lange Sicht pro Woche 0,66 € Gewinn

6. Ein Nachtwächter möchte im Dunkeln eine Tür aufsperrn. Von seinen fünf Schlüsseln passen für diese Tür genau drei. Er probiert in zufälliger Reihenfolge einen nach dem anderen bis der Schlüssel passt. Dabei steckt er nicht passende Schlüssel weg. X sei die Anzahl der Schlüssel, die der Nachtwächter ausprobiert, bis sich die Tür öffnen lässt.  
 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X (Tipp: Baumdiagramm) und berechnen Sie den Erwartungswert  $E(X)$ .

Lösungsskizze:

- Wahrscheinlichkeiten aus Baumdiagramm durch erste Pfadregel: =>



$$- E(X) = 1 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,1 = 1,5$$

7. Aus einer Urne mit zehn von 1 bis 10 nummerierte Kugeln werden zwei gezogen. Betrachten Sie das Ereignis A: "Zwei aufeinander folgende Zahlen werden gezogen".
- a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit für A an, wenn die erste Kugel wieder zurückgelegt wird.

Lösungsskizze:

- Bei 1 oder 10 gibt es nur 1 Möglichkeit beim zweiten Zug: 1-2 und 10-9
- Bei 2 bis 9 gibt es je 2 Möglichkeiten beim zweiten Zug: z.B. 2-1 und 2-3
- Anzahl der günstigen Möglichkeiten:  $|A| = 1+2+2+2+2+2+2+2+2+1 = 18$
- Anzahl der gesamten Möglichkeiten:  $|\Omega| = 10^2 = 100$
- Laplace-Wahrscheinlichkeit:  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{18}{100} = 0,18 = 18\%$

- b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit für A an, wenn beide Kugeln gleichzeitig gezogen werden (ohne Zurücklegen).

Lösungsskizze:

- Wichtig: Auch beim gleichzeitigen Ziehen die Anzahlen Zug für Zug bestimmen! Danach können Ergebnisse zusammengefasst werden.
- Bei 1 oder 10 gibt es nur 1 Möglichkeit beim zweiten Zug: 1-2 und 10-9
- Bei 2 bis 9 gibt es je 2 Möglichkeiten beim zweiten Zug: z.B. 2-1 und 2-3
- Anzahl der günstigen Möglichkeiten:  $|A| = 1+2+2+2+2+2+2+2+2+1 = 18$
- Anzahl der gesamten Möglichkeiten:  $|\Omega| = 10 \cdot 9 = 90$
- Laplace-Wahrscheinlichkeit:  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{18}{90} = 0,2 = 20\%$

- c) Ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A bei beliebiger Anzahl nummerierter Kugeln in der Urne beim Ziehen ohne Zurücklegen immer größer als beim Ziehen mit Zurücklegen? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Lösungsskizze:

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A bei beliebiger Anzahl nummerierter Kugeln in der Urne ist beim Ziehen ohne Zurücklegen immer größer als beim Ziehen mit Zurücklegen, da die Anzahl der gesamten Möglichkeiten ohne die Päsche kleiner ist während die Anzahl der günstigen Möglichkeiten bei beiden Arten gleich groß bleibt.

8. Bei einem Wettbewerb gewinnt das Gymnasium 10 Freifahrten in das Mathematikmuseum in Gießen. 27 Unterstufenschüler und 15 Mittelstufenschüler haben Interesse an einer Freifahrt. Wie viele Möglichkeiten hat man, die Fahrgruppe zusammenzustellen, wenn
- a) sonst nichts gefordert ist,

Lösungsskizze:

- Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge => „Lotto“
- „10 aus 27+15“:  $\binom{42}{10} = 1.471.442.973$
- (Taschenrechner:  $[42]+[nCr]+[10]$  mit  $[nCr] = [2ndF]+[5]$ )

- b) mindestens 9 Mittelstufenschüler mitfahren sollen?

Lösungsskizze:

- „9 aus 15“ und „1 aus 27“:  $\binom{15}{9} \cdot \binom{27}{1} = 135.135$

9. Ein Glücksrad wird sechs mal hintereinander gedreht (=6 Spiele). Es hat gleich große Felder: Sechs Felder mit Hauptgewinn, fünf Trostpreis-Felder und neun Nieten-Felder.  
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man nur beim 4. Spiel einen Trostpreis?

Lösungsskizze:

- z.B. mit Baumdiagramm 1. Pfadregel:

$$P = \frac{15}{20} \cdot \frac{15}{20} \cdot \frac{15}{20} \cdot \frac{5}{20} \cdot \frac{15}{20} \cdot \frac{15}{20} = \left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{243}{4096} \approx 0,059 \approx 5,9\%$$

- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man genau zwei Nieten?

Lösungsskizze:

- Binomialverteilung mit  $n = 6$ ,  $p = 9/20$  und  $k = 2$ :

$$P(X=2) = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{9}{20}\right)^2 \cdot \left(\frac{11}{20}\right)^4 \approx 0,278 \approx 27,8\%$$

- c) Wie oft muss man das Glücksrad drehen, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% mindestens einen Hauptgewinn erhält?

Lösungsskizze:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot \left(\frac{6}{20}\right)^0 \cdot \left(\frac{14}{20}\right)^n = 1 - \left(\frac{14}{20}\right)^n \geq 0,95$$

$$\Rightarrow 1 - 0,7^n \geq 0,95$$

$$\Rightarrow 0,7^n \leq 0,05 \quad | \ln$$

$$\Rightarrow n \cdot \ln 0,7 \leq \ln 0,05 \quad | : \ln 0,7 \quad (\text{Vorsicht: } \ln 0,7 < 0)$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{\ln 0,05}{\ln 0,7} \approx 8,4$$

Man muss das Glücksrad mindestens 9 mal drehen um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% einen Hauptgewinn zu erhalten.

10. Ein Test besteht aus 20 Fragen mit je drei Antwortmöglichkeiten, von denen jeweils eine richtig ist. Man besteht den Test, wenn mehr als 40% der Fragen richtig beantwortet werden, die Note 3 erhält man, wenn mindestens 12 aber weniger als 15 Fragen richtig beantwortet werden. Der Schüler Extemporalis ist unvorbereitet und rät bei jeder Antwort.

- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann Extemporalis genau 5 Fragen richtig beantworten?

Lösungsskizze:

$$P(X=5) = \binom{20}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{15} \approx 0,146 \approx 14,6\%$$

- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht er den Test?

Lösungsskizze:

- mehr als 40% der 20 Fragen müssen richtig beantwortet werden also mehr als 8 Fragen

-  $P(X > 8) = 1 - P(X \leq 8) \approx 1 - 0,8095 \approx 0,1905 \approx 19,1\%$

- c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit schreibt er die Note 3?

Lösungsskizze:

$$P(12 \leq X < 15) = P(X=12) + P(X=13) + P(X=14)$$

$$= \binom{20}{12} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{12} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 + \binom{20}{13} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{13} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7 + \binom{20}{14} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{14} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 \approx 0,00925 + 0,00285 + 0,00071 \approx 1,3\%$$

oder:  $P(12 \leq X < 15) = P(X < 15) - P(X < 12) = P(X \leq 14) - P(X \leq 11) \approx 0,9998 - 0,9870 \approx 1,3\%$